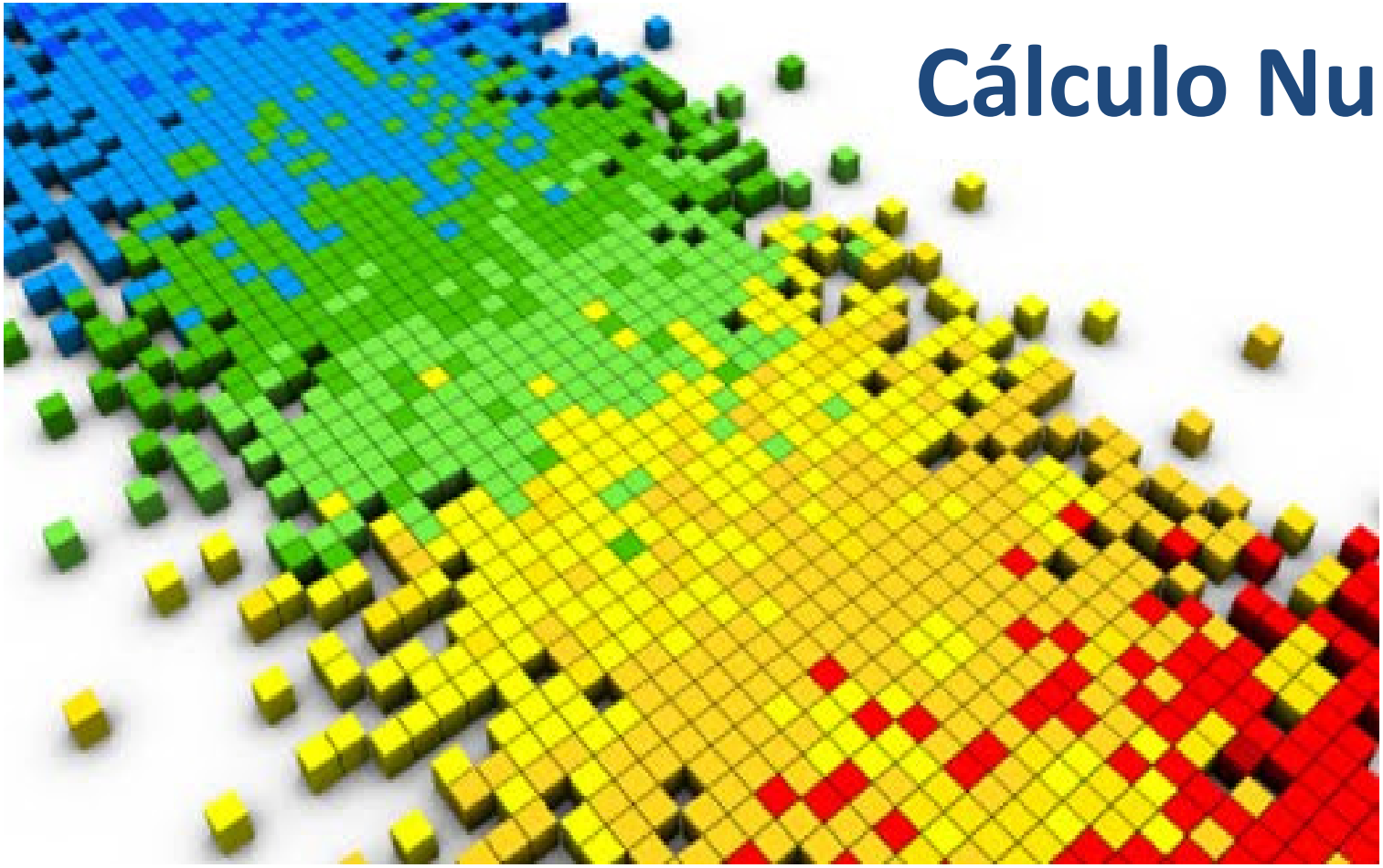


Cálculo Numérico

Aula 10 – Sistemas de Equações Lineares / Parte 3
Jacobi & Gauss-Seidel

Prof. Guilherme Amorim

gbca@cin.ufpe.br

UFPE

Centro de Informática U·F·P·E

2014.1 - 15/05/2014

Aula passada...

- Método da Decomposição LU
  - Seja o sistema $Ax = b$
  - No Método de Decomposição LU a matriz A é decomposta em duas matrizes L e U.
    - L: matriz triangular inferior
    - U: matriz triangular superior com os elementos da diagonal principal iguais a 1.
  - Logo, $LUx = b$.
  - Ou $Ux = y$ & $Ly = b$.

Métodos Diretos

- Cramer
- Eliminação de Gauss
- Eliminação de Gauss-Jordan
- Decomposição LU
- “Os métodos diretos não são recomendados quando o sistema de equações lineares a ser resolvido é muito grande ou se a matriz correspondente a ele tem a grande maioria de seus elementos nulos (matriz esparsa)”

Métodos iterativos

- Nos casos em que as matrizes são grandes e/ou esparsas os métodos iterativos são mais indicados.
- Partem de uma aproximação inicial $x^{(0)}$ da solução do sistema $Ax = b$ e geram uma sequência $\{x^{(k)}\}$ de soluções aproximadas de x.

E hoje?

- Método de Jacobi
  - Método do final do século XVIII

- Jacobi
  - Matemático Alemão
  - 1804-1851
  - “Most students feel that before doing research they should first master what has already been accomplished. To offset this notion, and to stimulate early interest in independent work, Jacobi would deliver the parable: "Your father would never have married and you would not be born, if he had insisted on knowing all the girls in the world before marring one"”

Carl Gustav Jakob Jacobi

E hoje?

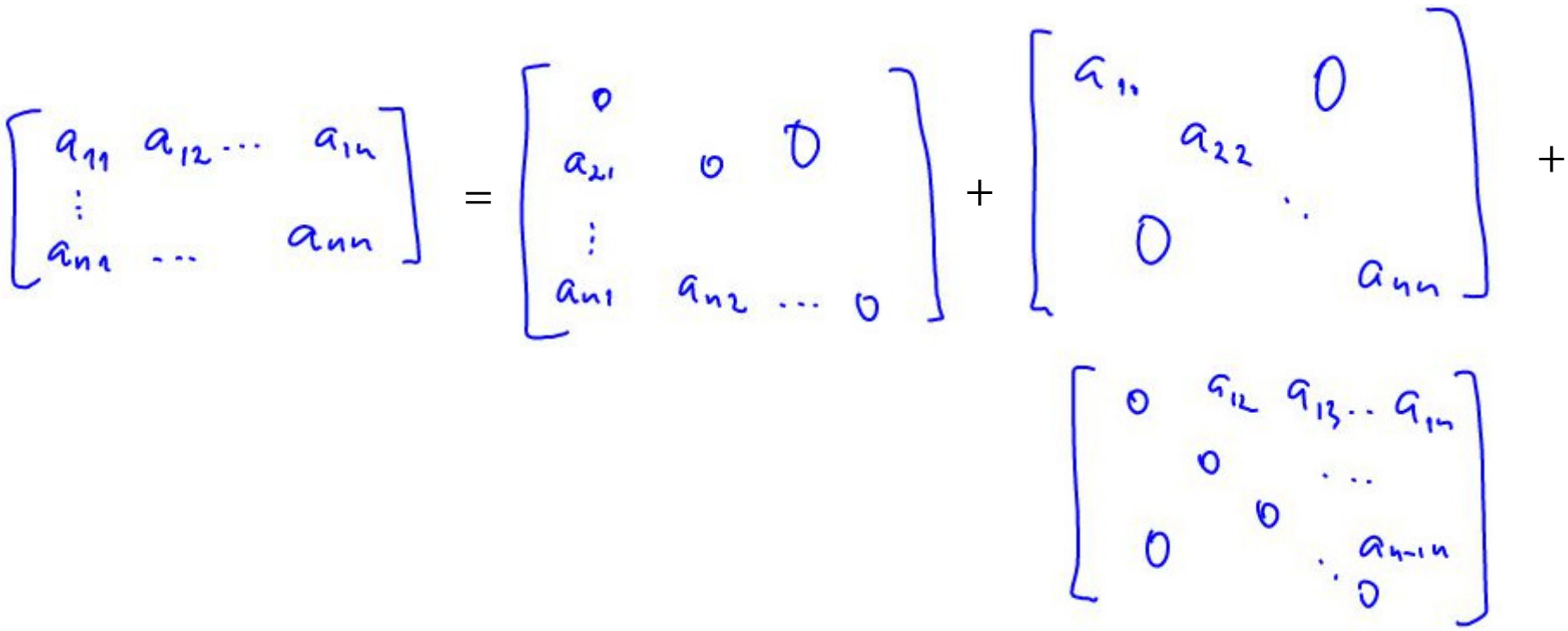
- Método de Gauss-Seidel
- Carl Friedrich Gauss
  - Matemático Alemão
  - 1777-1855
- Philipp Ludwig Ritter von Seidel
  - Matemático Alemão
  - 1821-1896
- O método é de Gauss (1823), mas só foi publicado em 1874 por Seidel.

Introdução

- Partindo de $Ax = b$, podemos separar A em 3 partes:
- $A = I + D + S$, onde:
  - I: matriz triangular inferior (com zeros na diagonal principal)
  - D: matriz diagonal
  - S: matriz triangular superior (com zeros na diagonal principal)

Introdução

- $A = I + D + S$



- D não pode ter zeros na diagonal principal

Introdução

- $Ax = b$, trocamos por:
- $(I + D + S)x = b$
  - Esta equação é utilizada para obter soluções x^{k+1} a partir de x^k
  - É um processo iterativo em que definimos x^{k+1} a partir de x^k.
  - Naturalmente, precisamos de um x^0.

Método de Jacobi

$$(I + D + S)x = b$$

$$Dx = b - (I + S)x$$

$$x = D^{-1}b - D^{-1}(I + S)x$$

Fazendo, $B = -D^{-1}(I + S)$

$$c = D^{-1}b$$

Temos:

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$$

Matriz B

$$B = -D^{-1}(I + S)$$

$$= -\begin{bmatrix} 1/a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & 1/a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & \\ \vdots & & & \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \cdots & & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ , se } i = j \\ -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} \text{ , se } i \neq j \end{cases}$$

Vetor c

$$c = D^{-1}b = \begin{bmatrix} 1/a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & 1/a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1/a_{11} \\ \vdots \\ b_n/a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow c_i = \frac{bi}{a_{ii}}$$

Processo iterativo - Jacobi

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$$

$$\Rightarrow x_i^{(k+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)}$$

$$\Rightarrow \quad x_i^{(k+1)} = \left(b_i \; - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) / a_{ii}$$

Jacobi – Critérios de parada

- Podemos ter vários critérios de parada:
  - Ex1: $\max\limits_{1 \le i \le n} \dfrac{|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}|}{|x_i^{(k)}|} < \varepsilon$
  - Ex2: $\max\limits_{1 \le i \le n} |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| < \varepsilon$
    - ε é a precisão desejada
- É importante também estabelecermos um número máximo de iterações:

$$k > M$$

  - M é o número máximo de iterações

Exemplo 3.5

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 7 \\ 2x_1 - 4x_2 + 10x_3 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & -2 \\ 2 & -4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) / a_{ii}$$

$$x_1^{(k+1)} = (8 - 2x_2^{(k)} - 1x_3^{(k)})/5$$

$$x_2^{(k+1)} = (7 - 3x_1^{(k)} + 2x_3^{(k)})/6$$

$$x_3^{(k+1)} = (8 - 2x_1^{(k)} + 4x_2^{(k)})/10$$

Exemplo 3.5

- Representando de outra forma:

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2/5 & -1/5 \\ -1/2 & 0 & 1/3 \\ -1/5 & 2/5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6/5 \\ 7/6 \\ 9/10 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3.5

- Utilizando $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$ e 4 decimais, temos:

Iterações k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0,0000	0,0000	0,0000
1	1,6000	1,1667	0,8000
2	0,9733	0,6333	0,9467
3	1,1573	0,9956	0,8587
4	1,0300	0,8742	0,9668
5	1,0570	0,9739	0,9437
6	1,0217	0,9527	0,9782
11	1,0060	0,9916	0,9940
15	1,0010	0,9988	0,9990
21	1,0001	0,9999	0,9999
24	1,0000	1,0000	1,0000

Algoritmo de Jacobi

Algoritmo de Jacobi

1. Escolher uma aproximação inicial $x^{(0)}$, em geral $x_i^{(0)} = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n.$

(Na realidade, se a matriz dos coeficientes satisfaz uma dada condição de convergência, será vista mais adiante, o processo iterativo converge para qualquer valor de $x^{(0)}$).

2. Para $k = 0,1, 2, \ldots$ faça

Para $i = 1, 2, \ldots, n$ faça

(não necessariamente nesta ordem)

$$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) / a_{ii}$$

fim.

Se $\left(\max_{1 \leq i \leq n} \frac{| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} |}{| x_i^{(k)} |} < \varepsilon \right.$

ou $k > M$ $\left.\right)$ Pare.

(Onde ε é uma precisão dada e M um natural que informa a quantidade de iterações a ser realizada)

fim.

Método de Gauss-Seidel

- Retomando o exemplo 3.5

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 7 \\ 2x_1 - 4x_2 + 10x_3 = 8 \end{cases}$$

$$x_1^{(k+1)} = (8 - 2x_2^{(k)} - 1.x_3^{(k)})/5$$

$$x_2^{(k+1)} = (7 - 3x_1^{(k)} + 2x_3^{(k)})/6$$

$$x_3^{(k+1)} = (8 - 2x_1^{(k)} + 4x_2^{(k)})/10$$

- Quando calculamos os valores de x_2 e x_3, já poderíamos utilizar os valores já atualizados na mesma iteração pelas demais variáveis?
- Assim, teríamos:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (8 - 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)})/5 \\ x_2^{(k+1)} = (7 - 3x_1^{(k+1)} + 2x_3^{(k)})/6 \\ x_3^{(k+1)} = (8 - 2x_1^{(k+1)} + 4x_2^{(k+1)})/10 \end{cases}$$

Exemplo 3.5 (Gauss-Seidel)

- Resolvendo o exemplo 3.5 pelo método de Gauss-Seidel, chegamos à tabela abaixo:

Iterações k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0,0000	0,0000	0,0000
1	1,6000	0,3667	0,6267
2	1,3280	0,7116	0,8190
3	1,1516	0,8639	0,9152
4	1,0714	0,9360	0,9601
5	1,0336	0,9699	0,9813
6	1,0158	0,9859	0,9912
10	1,0008	0,9993	0,9996
11	1,0004	0,9997	0,9998
14	1,0000	1,0000	1,0000

Notar que foram necessárias somente 14 iterações. 10 a menos que no método de Jacobi.

Método de Gauss-Seidel

- $(I + S + D)x = b$
  - Consideramos $A = I + S + D$
- $(I + D)x = b - Sx$ (ii)
- Escrevendo na forma $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$, temos:
  - $x^{(k+1)} = (I + D)^{-1}b - (I + D)^{-1}Sx^{(k)}$
- Ou se de (ii), $Dx^{(k+1)} = b - Ix^{(k+1)} - Sx^{(k)}$
  - $\boldsymbol{x^{(k+1)} = D^{-1}b - D^{-1}Ix^{(k+1)} - D^{-1}Sx^{(k)}}$
  - Difere do processo de Jacobi por utilizar, para o cálculo de um componente de $\boldsymbol{x^{(k+1)}}$, o valor mais recente das demais componentes.

Método de Gauss-Seidel

- $\boldsymbol{D^{-1}b}$

$$D^{-1}b = \begin{bmatrix} b_1/a_{11} \\ \vdots \\ b_n/a_{nn} \end{bmatrix}$$

- $\boldsymbol{D^{-1}I}$

$$D^{-1}I = \begin{bmatrix} 1/a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & 1/a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \\ a_{21} & & \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-1}\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \\ a_{21}/a_{22} & & \\ \vdots & & \\ a_{n1}/a_{nn} & \cdots & a_{n\,n-1}/a_{nn}\ 0 \end{bmatrix} \qquad (D^{-1}I)_{ij} = \begin{cases} \dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}, & i > j \\ 0, & i \leq j \end{cases}$$

Método de Gauss-Seidel

- $\boldsymbol{D^{-1}S}$

$$D^{-1}S = \begin{bmatrix} 1/a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & 1/a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a_{n-1\,n} \\ & & & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a_{12}/a_{11} & \cdots & a_{1n}/a_{11} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \frac{a_{n-1\,n}}{a_{n-1\,n-1}} \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$(D^{-1}S)_{ij} = \begin{cases} a_{ij}/a_{ii} & j > i \\ 0 & j \leq i \end{cases}$$

Método de Gauss-Seidel

- Logo,
  - $\boldsymbol{x^{(k+1)} = D^{-1}b - D^{-1}Ix^{(k+1)} - D^{-1}Sx^{(k)}}$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{n} (D^{-1}I)_{ij}\, x_j^{(k+1)} - \sum_{j=1}^{n} (D^{-1}S)_{ij}\, x_j^{(k)}$$

$$= \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)}$$

$$(D^{-1}I)_{ij} = \begin{cases} a_{ij}/a_{ii}, & i > j \\ 0, & i \leq j \end{cases} \qquad D^{-1}S = \begin{cases} a_{ij}/a_{ii} & j > i \\ 0, & j < \end{cases}$$

Método de Gauss-Seidel

- Logo, temos a sequência

$$x_i^{(k+1)} = \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right] / a_{ii}$$

Gauss-Seidel (Algoritmo)

Algoritmo de Gauss-Seidel

1. Escolher uma aproximação inicial $x^{(0)}$, em geral $x_i^{(0)} = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n.$

(Na realidade, se a matriz dos coeficientes satisfaz uma dada condição de convergência, será vista mais adiante, o processo iterativo converge para qualquer valor de $x^{(0)}$).

2. Para $k = 0,1, 2, \ldots$ faça

Para $i = 1, 2, \ldots, n$ faça

(necessariamente nesta ordem)

$$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) / a_{ii}$$

fim

Se $\left(\max_{1 \le i \le n} \frac{| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} |}{| x_i^{(k)} |} < \varepsilon \right.$

ou $k > M$ $\left.\right)$ Pare.

(Onde ε é uma precisão dada e M um natural que informa a quantidade de iterações a ser realizada)

fim.

Observações

- O número de operações nos métodos de Jacobi e de Gauss-Seidel depende da quantidade de coeficientes não nulos em cada equação.
- Se a i-ésima equação possui t_i coeficientes não-nulos, os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel necessitam de $t_i A + t_i M + D$ operações em cada iteração.
  - A: # adições/subtrações
  - M: # multiplicações
  - D: # divisões

Observações

- Logo, o número total de operações de ponto flutuante em cada iteração para um sistema de n equações é dado por:

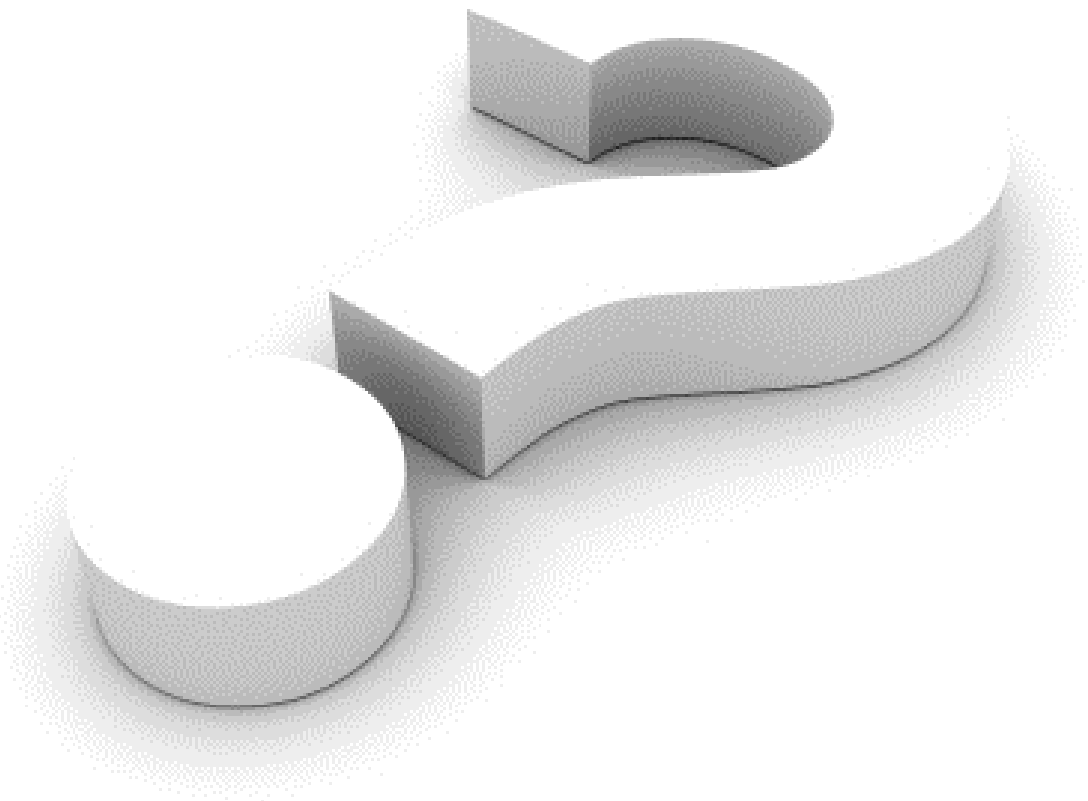
$$\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right) A + \left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right) M + nD$$

Voltando ao exemplo 3.5

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (\,8 - 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)}\,)/\,5 \\ x_2^{(k+1)} = (\,7 - 3x_1^{(k+1)} + 2x_3^{(k)}\,)/\,6 \\ x_3^{(k+1)} = (\,8 - 2x_1^{(k+1)} + 4x_2^{(k+1)}\,)/10 \end{cases}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{3} t_i\right) A + \left(\sum_{i=1}^{3} t_i\right) M + 3D$$

- Para cada equação A=2, M=2 e D=1.
- Como temos 3 coeficientes não nulos,
- 3x2 + 3x2+3x1=15

Bibliografia

- **[1] Silva, Zanoni; Santos, José Dias. Métodos Numéricos, 3ª Edição. Universitária, Recife, 2010.**
- **[2] Notas de aula do prof. Divanilson Campelo**
- **[3] Ruggiero, Márcia; Lopes, Vera. Cálculo Numérico – Aspectos Teóricos e Computacionais, 2ª Edição. Pearson. São Paulo, 1996.**
- **[4] JACOBI, C.G.J(1804-1851)** http://library.thinkquest.org/22584/temh3013.htm